

## ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертацию Савастеева Дениса Владимировича

«Некоторые вопросы качественной теории

дифференциальных уравнений на стратифицированных множествах»,

представленной на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук по специальности

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

**Актуальность темы исследования.** В последние десятилетия большой интерес вызывают задачи с дифференциальными уравнениями на так называемых стратифицированных множествах. Такие задачи возникают при рассмотрении систем, состоящих из участков различной размерности, примыкающих друг к другу по общим граням. На каждом участке рассматриваются дифференциальные уравнения, а в местах стыка вводятся специальные дифференциальные соотношения (условия трансмиссии). Подобным задачам были посвящены работы G. Lumer, S. Nicaise, J. Von Belov, Ю.В. Покорного, О.М. Пенкина и др. Но в основном рассматривались вопросы о разрешимости соответствующих краевых задач.

Начиная с работ Ю.В. Покорного, О.М. Пенкина используется новый подход, при котором все дифференциальные уравнения и условия трансмиссии рассматриваются как единое «синтетическое» уравнение. Делается это путём введения специальной стратифицированной меры, по которой производятся операции дифференцирования. Такой подход значительно упрощает изучение качественных свойств подобных уравнений. Например, были получены теоремы о среднем для мягкого лапласиана (аналога классического лапласиана), теоремы о дивергенции, формулы Грина и др. Тем не менее, окончательных результатов всё ещё сравнительно мало. Связано это со сложной структурой стратифицированных множеств. Из-за этого классические методы доказательств оказываются неприменимы. Таким образом, тема диссертационной работы является актуальной для теории дифференциальных уравнений.

Основным объектом исследования в диссертации являются дифференциальные уравнения второго порядка эллиптического типа на стратифицированных множествах. На стратифицированных множествах получено существенное продвижение в сильном принципе максимума для недивергентного эллиптического оператора, доказаны аналоги неравенства Харнака и теоремы об устранимой особенности для мягкого лапласиана. Все результаты получены без ограничения на размерность стратифицированного множества.

**Содержание работы.** Диссертация состоит из введения, четырёх глав, содержащих 20 параграфов, и списка литературы из 39 наименований.

В первой главе даётся описание необходимых понятий и вспомогательных утверждений. В частности, даётся определение стратифицированного множества, стратифицированной меры и дивергенции векторного поля, необходимые функциональные пространства и дифференциальные операторы.

Во второй главе доказывается сильный принцип максимума для недивергентного эллиптического оператора. Утверждается, что решение неравенства  $Lu \geq 0$  эллиптическим оператором  $L$  не может иметь нетривиального локального максимума внутри стратифицированного множества. Ключевую роль здесь играет лемма о нормальной производной – аналог леммы Олейник-Хопфа. Также во второй главе доказывается сильный принцип максимума для параболического оператора на стратифицированном множестве.

В третьей главе доказывается аналог неравенства Харнака для мягкого лапласиана на стратифицированном множестве. Стоит отметить, что сложная геометрия стратифицированных множеств не позволяет перенести классическое доказательство неравенства Харнака с помощью теорем о среднем. Поэтому автор использует значительно более сложные построения.

Четвёртая глава посвящена теореме об устранимой особенности для гармонической функции на стратифицированном множестве. Суть её состоит в том, что множество точек стратов, размерность которых меньше старшей на два и более, является устранимым по отношению к мягкому лапласиану при условии усиленной прочности стратифицированного множества. Особенно стоит отметить важность этой теоремы при изучении краевых задач на стратифицированных множествах. Она позволяет использовать метод Пуанкаре-Перрона для доказательства разрешимости задачи Дирихле для мягкого лапласиана на стратифицированном множестве.

**Научная новизна и достоверность.** Диссертация Д.В. Савастеева представляет законченное исследование, выполненное на достаточно высоком теоретическом уровне. Результаты работы являются новыми и актуальными. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы при изучении эллиптических и параболических операторов на стратифицированных множествах. Все результаты прошли достаточную апробацию, своевременно и в полном объёме опубликованы в реферируемых научных журналах. По теме диссертации имеется 8 публикаций, из них 4 статьи в журналах из списка изданий, рекомендованных ВАК.

**Замечания.** Отметим следующие замечания:

1. Некоторые геометрические построения (например, на стр. 81-82) можно было снабдить сопровождающим рисунком. Это бы упростило общее понимание текста.

2. В конце третьей главы, в параграфе 3.4, вводится обобщённое понятие гармонической функции на стратифицированном множестве в смысле теоремы о среднем. При этом показывается, что основные результаты главы остаются верными при переходе к этому обобщённому понятию. Было бы уместней сразу дать такое определение гармонической функции в начале главы и строить доказательство уже исходя из этого определения.

3. На стр. 53 в теореме 3.1 пропущено слово «неотрицательной» в отношении гармонической функции  $u$ .

Перечисленные замечания не снижают общего положительного впечатления о работе.

Полученные в диссертационной работе результаты прошли достаточную апробацию: докладывались и обсуждались на международных и российских конференциях и своевременно опубликованы в реферируемых научных журналах. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертационная работа «Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений на стратифицированных множествах» отвечает всем требованиям, предъявляемым в п.9 Положения о присуждении учёных степеней к работам на соискание учёной степени кандидата наук, а её автор – Савастеев Денис Владимирович, заслуживает присуждения ему степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент:

кандидат физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление,  
доцент, доцент кафедры математики и моделирования систем Воронежского института МВД России

С.М. Ситник

*Контактная информация:*

Почтовый адрес: 394065, Воронеж, пр. Патриотов 53

факс: 8 (473) 200-55-00

сайт: [www.vimvd.ru](http://www.vimvd.ru)

телефон: 8-910-243-7771

e-mail: [mathsms@yandex.ru](mailto:mathsms@yandex.ru)

Подпись С.М. Ситника заверяю

